BULETIN **pmri**
PENDIDIKAN MATEMATIKA REALISTIK INDONESIA

Edisi Kelima - Oktober 2004

Oleh: Darhim

MENGEMBANGKAN PEMODELAN SUATU MASALAH KONTEKSTUAL

Matematika merupakan ilmu yang seyogyanya tidak diajarkan kepada siswa sebagai suatu hasil yang langsung jadi, tetapi matematika sebaiknya dipelajari siswa melalui penemuan dengan bimbingan atau tanpa bimbingan guru. Ini penting karena belajar matematika merupakan suatu aktivitas yang pembelajarannya tidak dimulai dari bentuk matematika yang formal dengan menggunakan berbagai algoritma dan ketentuan, melainkan konsep matematika harus dimunculkan berdasarkan realitas dan sesuai dengan pengetahuan prasyarat yang dimiliki siswa. Ini sesuai dengan pandangan bahwa matematika sebagai aktivitas manusia.

Dalam kaitan matematika sebagai aktivitas manusia, sebenarnya tidak semua konsep matematika serta merta muncul dan nampak dalam kehudupan sehari-hari. Tidak sedikit permasalahan matematika terbungkus rapih dalam suatu aktivitas manusia, sehingga untuk mengetahui dan memahaminya diperlukan pengetahuan yang cukup tetang ciri-ciri permasalahan tersebut. Pemodelan merupakan salah satu sarana untuk memahami dan mengaitkan permasalahan dalam kehidupan sehari-hari dengan konsep matematika yang sesuai. Melalui pemodelan masalah-masalah kontekstual tertentu dapat disusun dan dibentuk menjadi model matematika.

Penemuan terbimbing yang dilakukan siswa dalam PMRI harus diartikan sebagai memberikan kesempatan yang sangat leluasa kepada siswa untuk menemukan sendiri konsep-konsep matematika dengan menyelesaikan berbagai masalah kontekstual. Ini memungkinkan sebab soal kontekstual dapat mengarahkan siswa dalam membentuk konsep matematika, menyusun modelnya, menerapkan konsep yang telah diketahui sebelumnya, dan menyelesaikan masalah tersebut berdasarkan kaidah matematika yang berlaku. Sedangkan dalam salah satu prinsip utama PMRI, siswa diharapkan mampu mengembangkan model sendiri dalam belajar matematika. Di samping itu penggunaan model dalam pembelajaran matematika merupakan salah satu karakteristik dari lima karakteristik PMRI.

Dalam mengembangkan model sendiri pada proses pembelajaran matematika, siswa memulainya dari situasi nyata atau kontekstual yang sudah banyak dikenalnya dengan cara memformulasikan masalah tersebut dalam bentuk informal. Inilah yang disebut model dari (*model of*). Setelah tersusunnya model dari, dalam menyelesaikan masalah kontekstual, siswa dikondisikan untuk mengarah ke model untuk (*model for*) hingga siswa mendapatkan pengetahuan matematika yang formal. Penyusunan model tersebut dilakukan pada proses matematisasi horizontal. Siswa mengidentifikasi bahwa masalah kontekstual harus ditransfer ke dalam bentuk matematika untuk bisa dipahami dan dipecahkan lebih lanjut dengan aturan-aturan matematika. Melalui penskemaan, perumusan, serta pemvisualan, siswa diharapkan dapat menemukan hubungan diantara bagian-bagian masalah kontekstual tersebut dan mentransfernya ke dalam model matematika.

Pemodelan sangat diperlukan dalam belajar matematika, sebagai langkah pertama supaya dimulai dengan keadaan sehari-hari yang sebenarnya atau riil dan langkah berikutnya dilanjutkan dengan modelnya. Hal di atas menggambarkan bahwa situasi sehari-hari nampaknya belum cukup menggambarkan suatu pengerjaan hitung, walaupun masalah tersebut telah dikenal para siswa dan sering dijumpainya. Oleh karena itu masalah tersebut harus dibuat modelnya agar pengerjaan hitung yang dimaksudkan dalam masalah tersebut jelas, mudah dipahami, dan dapat diselesaikan.

Pemodelan yang harus dibuat dalam menyelesaikan masalah kontekstual sebenarnya merupakan pemodelan setiap pernyataan yang memuat informasi pendukung maksud pertanyaan soal kontekstual tersebut. Sebagai contoh, perhatikan soal kontekstual berikut:

Budi mempunyai kelereng merah dan putih. Kelereng merah 14 buah. Kelereng putih 28 buah. Berapa banyak kelereng Budi?

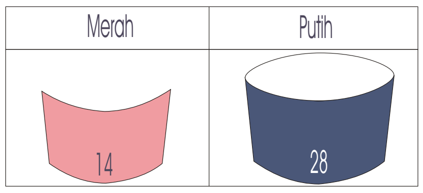
Pada soal kontekstual di atas, informasi-informasi pendukung pertanyaan soal tersebut adalah:
1. Kelereng Budi merah dan putih.
2. Kelereng merah 14 buah.
3. Kelereng putih 28 buah.

Sedangkan pertanyaan soal kontekstual tersebut adalah:
4. Berapa banyak kelereng Budi?

Pemodelan untuk informasi nomor 1 terdapat tiga hal yang harus divisualkan, yaitu: Pertama, merah yang menyatakan salah satu warna kelereng Budi. Ini terkait dengan informasi selanjutnya yaitu nomor 2. Kedua, putih yang menyatakan warna yang lain dari kelereng Budi. Juga ini terkait dengan informasi selanjutnya yaitu nomor 3. Ketiga, kata "dan" yang menyatakan hubungan antara merah dengan putih. Kata "dan" di sini harus dicari kesamaan maksudnya dengan operasi dalam matematika. Oleh karena itu dalam pembelajaran matematika kontekstual perlu perbendaharaan kata atau kalimat yang sesuai dengan maksud-maksud setiap notasi matematika. Yang jelas untuk satu notasi matematika bisa bermacam-macam makna kalimat atau kata dalam situasi sehari-harinya. Sudah siapkah para guru menyampaikan bahasa, kata, atau kalimat dalam situasi sehari-hari yang sesuai dengan operasi hitung matematika kepada para siswa?

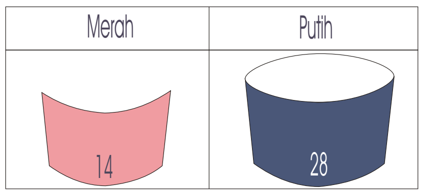
Kembali kepada kata hubung "dan" di atas yang merupakan kata yang menyambungkan kata "merah" dan "putih" pada informasi nomor 1. Kata tersebut dalam matematika bermakna sama dengan operasi penjumlahan (+). Dengan demikian informasi nomor 1 di atas bisa dinyatakan: "Kelereng Budi merah *ditambah* putih" atau "Kelereng Budi merah + putih". Dengan perubahan informasi seperti di atas, maka maksud pertanyaan nomor 4 akan semakin jelas, yaitu banyak kelereng Budi itu diperoleh dengan menentukan kelereng merah ditambah kelereng putih.

Pemodelan untuk informasi nomor 2 dan 3 dapat dilakukan dengan berbagai macam cara, mulai dari model yang paling kongkrit hingga ke yang paling abstrak. Dari berbagai pemodelan yang dapat dibuat untuk informasi nomor 2 dan 3 di atas digunakan untuk melengkapi model untuk informasi nomor 1, yaitu melengkapi kata "merah" serta kata "putih". Sebagai contoh, model selengkapnya untuk soal kontekstual di atas diperlihatkan seperti berikut.



Kelereng Budi merah ditambah putih
Kelereng Budi merah + putih
Kelereng Budi 14+28

Pemodelan di atas mungkin lebih praktis dan cukup dibuat sebagai berikut:



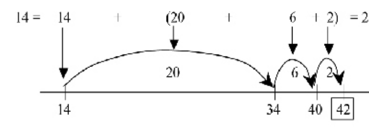
14 + 28

Dengan demikian model untuk informasi nomor 1 di atas adalah 14+28. Inilah banyak kelereng Budi dimaksud.

Untuk memudahkan dalam menentukan jumlah kelereng Budi tersebut, maka model untuk informasi di atas bisa dilanjutkan yaitu dengan cara membuat model abstrak dari 14 dan 28. Berbagai model dimaksud sebagai berikut:

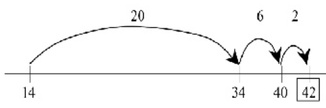
1. 14 = 10 + 4 dan 8 + 20 = 28	6. 14 = 14 dan 10 + 10 − 8 = 28
2. 14 = 10 + 4 dan 6 + 2 − 20 = 28	7. 14 = 14 dan 10 +10 − 6 + 2 = 28
3. 14 = 10 + 4 dan 8 + 20 = 28	8. 14 = 14 dan 20 + 8 = 28
4. 14 = 10 + 2 − 2 dan 8 − 20 = 28	9. 14 = 14 dan 20 + 6 + 2 = 28
5. 14 = 14 dan 6 + 2 + 10 +10 = 28	10. 14 = 14 dan 6 + 20 + 2 = 28

Selain kesepuluh model yang diperlihatkan di atas, sebenarnya mungkin masih banyak model lain untuk menyatakan 14 dan 28 tersebut. Model-model tersebut akan menggambarkan pola-pola strategi penyelesaian masalah kontekstual di atas. Berikut salah satu contoh strategi penyelesaian masalah kontekstual tersebut, apabila pemodelan informasi nomor 1 dipilih model nomor 9. Penyelesaiannya disajikan dengan visual garis bilangan sebelum sampai kepada yang paling abstrak.



Jadi 14 + 28 = 42

Secara sederhana strategi diatas bisa digambarkan sebagai berikut :



Jadi 14 + 28 = 42

Apabila garis bilangan tidak digunakan, maka pengerjaan hitung yang dilakukan dalam menetukan penyelesaian 14+28 sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
14 + 28 &= 14 + (20 + 6 + 2)\\
&= 34 + 6 + 2\\
&= 40 + 2\\
&= 42
\end{aligned}
$$

Jadi kelereng Budi 42 buah.

Berdasarkan uraian di atas dapat dibayangkan banyaknya variasi penyelesaian suatu masalah kontekstual. Ditinjau dari segi pemodelan

Informasi nomor 2 dan 3 saja banyak pemodelan bisa dibuat, belum lagi ditambah pemodelan untuk informasi nomor 1 beserta gabungannya. Itulah salah satu ciri PMRI yang sekaligus merupakan kekuatan PMRI. Dengan menyediakan banyak peluang, walaupun hasilnya hanya sebuah, untuk menyelesaikan suatu masalah kontekstual sangat dimungkinkan terungkapnya berbagai potensi kemampuan siswa dalam belajar matematika. Hal ini sesuai dengan salah satu karakteristik PMRI yaitu menggunakan kontribusi siswa dalam pembelajaran matematika.

(Dosen UPI Bandung)

Oleh: R.K.Sembiring

NOL = TIDAK ADA?

Dari semua bilangan, nol kelihatannya yang paling sederhana, paling mudah dipahami, dan mungkin ada yang menduka wajarnya yang pertama ditemukan.. Tapi, apa betul begitu?

Pengertian nol, tidak ada, kosong, hampa, ternyata cukup sulit memahaminya dan tidak jarang menimbulkan kebingungan. Ada pula yang mengelak membahasnya karena dianggap sudah jelas dengan sendirinya (trivial). Bahwa pengertian **tidak ada**, sebagai lawan dari **ada,** cukup pelik memahaminya terlihat dari terbitnya sebuah buku karangan fisikawan terkenal John D. Barrow : *The Book of Nothing: Vacuums, Voids, and the Latest Ideas about the Origins of the Universe* (Pantheon Books, 2000, 360 halaman). Ide tulisan ini dan sebagian dari bahannya berasal dari buku itu.

Apakah berguna bicara tentang **sesuatu** yang **tidak ada**? (Pernyataan itu sendiri bertentangan, **sesuatu** mengacu pada yang **ada**, bukan?). Orang Junani kuno menganggap tidak berguna, tapi bagi orang India, sebaliknya.

Orang Mesir kuno mungkin yang pertama sekali yang menggunakan sistem bilangan sekitar 5000 tahun yl. Kendati sistem desimal sudah digunakan, bilangan nol belum dikenal.

Orang Junani jaman dulu, yang mengembangkan geometri yang menjadi dasar matematika modern, tidak pernah menggunakan lambang nol. Mereka kelihatannya bingung menghadapi bilangan ini. Sebaliknya, dalam tradisi agama Hindu orang dianggap mungkin berasal dari Tidak Ada dan mungkin kembali lagi ke situ, dan transisi ini bisa terjadi berulang-ulang.

Bagi orang India, nol (*sunya,* dalam bahasa India) berarti tidak ada, kosong, atau sesuatu yang tidak berarti jadi dapat diabaikan. Kelihatannya lambang nol berasal dari India dan mulanya dinyatakan dengan titik, seperti titik merah di dahi gadis untuk menambah kecantikannya. Lama kelamaan lambang nol ini berubah menjadi titik besar dan akhirnya menjadi 0, sehingga kita peroleh sistem bilangan 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

India di abad 6 M sudah menggunakan sistem bilangan berbasis 10 (desimal), yaitu dari 1 s/d 9 dan kelipatan 10 dari sistem tadi, jadi 1 s/d 9, 10 s/d 90, dst. Lambang 0 digunakan untuk mengisi tempat yang belum terwakili dalam sistem tersebut sehingga diperoleh {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0}. Menambah lambang 0 dibelakang suatu bilangan berarti mengalikan bilangan tersebut dengan 10.

Brahmagupta, seorang astronom India pada thn 628 kemudian membuat aturan berhitung sbb:

"Bila *sunya* (nol) ditambahkan ke atau dikurangkan dari suatu bilangan maka bilangan itu tidak berubah;
suatu bilangan dikalikan dengan *sunya* menjadi *sunya.*"

Dia juga mendefiniskan tak hingga sebagai hasil pembagian sembarang bilangan dengan 0 dan membuat aturan umum untuk mengalikan dan membagi bilangan positif dan negatif.

Menurut Genesis (Bibel), Tuhan menciptakan alam semesta dari tidak ada (penciptaan dari nihil). Apakah ada awal dan akhir dari waktu? Menurut Stephen Hawking (*A Brief History of Time*, sudah diterjemahkan ke bahasa Indonesia, *Hikayat Sang Kala*), waktu berawal dari Dentuman Besar (Big Bang) sekitar 14 milyard tahun yl. Teori ini masih menjadi topik pembahasan yang ramai di kalangan kosmolog dan memerlukan matematika yang sangat lanjut untuk memahaminya.

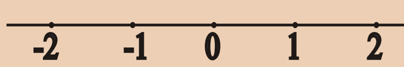
Dalam matematika hanya yang ada (terdefinisi) yang boleh menjadi bahan bahasan. Pengertian 'ada' di sini tidak perlu berbentuk materi yang dapat diraba, cukup ada dalam pikiran seperti garis lurus yang panjangnya tak berhingga, tidak ada dalam kenyataan. Karena itu suatu kajian sering dimulai dengan mendefinisikan apa yang akan dibahas, dan berusaha menjamin bahwa himpunan dari apa yang akan dibahas bukan himpunan kosong. Dalam teori himpunan kita kenal himpunan kosong, lambang ø, yaitu himpunan yang tidak punya anggota. Contoh, himpunan laki-laki yang dapat melahirkan. Anggotanya tidak ada, nol, tapi himpunannya ada, ø.

Apa bedanya 0 dengan ø? Lantas, himpunan {0}dengan {ø}, atau {ø,{ø}}, dst? Dalam matematika kita tidak ingin dibatasi oleh ruang, waktu, maupun jarak. Badan boleh dikerangkeng tapi pikiran menerawang ke segala penjuru alam semesta, bebas! Semua materi di alam semesta (proton, electron, atom,dsb) berhingga banyaknya, tapi matematikawan senang bermain-main dengan lambang (tak hingga), suatu konsep yang juga cukup membingungkan.

Contoh, 2 = , 2 - = - = 0 ? atau 2 - = (2 1) = ?; 0 x = ? Ingat, bukan bilangan, karena tidak memenuhi sifat bilangan. Karena itu operasi bilangan (+, -, :, x) yang dikenakan pada lambang memberi hasil yang tidak konsisten.

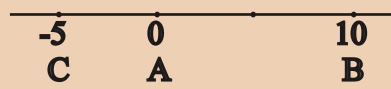
Ternyata tak hingga juga bermacam-macam. Banyaknya semua bilangan rasional antara 0 dan 1 tak hingga. Juga banyaknya bilangan real antara 0 dan 1 juga takhingga. Tapi yang terakhir ini jauh, jauh lebih banyak dari yang pertama, begitu banyaknya sehingga yang pertama dapat diabaikan banyaknya. Aneh bin ajaib. Itulah matematika, musjkil, penuh misteri. Kenapa takut?

Dalam sistem bilangan, pengertian 0 bukan berarti tidak ada. Keberadaannya sama saja dengan bilangan lain, seperti 1, -10, 17, dsb. Salah satu cara agar mudah memahaminya ialah dengan menggunakan garis bilangan, seperti gambar berikut:



Contoh.

Kota A, B, dan C terletak pada satu garis lurus, C sebelah kiri A dan B sebelah kanan. Jarak AB 10 km dan jarak AC 5 km. Saya berada di A, jadi wajar kalau saya menggunakan pusat pengukuran di A, jadi jarak AA 0 km. Untuk membedakan arah maka saya dapat menggunakan arah ke kanan + dan arah ke kiri -. Ini hanyalah suatu kebiasaan. Jadi, titik 0, atau titik A, adalah titik awal pengukuran, tempat saya berada, dan letak (koordinat) titk B 10, sedangkan titik C -5.



(Dosen Matematika ITB)